ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά προσανατολισμού

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχ. βιβλίο σελ. 111

Α2. Σχ. βιβλίο σελ.104

Α3. Σχ. βιβλίο σελ.128

Α4. α) Λ

β) Λ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A_{goh} = A_f = \{x \in A_h \;\; kai \;\; h(x) \in A_g\} = \{x > 0 \;\; kai \;\; lnx \in R\} = (0, +\infty)$

$f(x) = (goh)(x) = g(h(x)) = g(lnx) = \frac{4-e^{2lnx}}{e^{lnx}} = \frac{4-e^{lnx^2}}{x} = \frac{4-x^2}{x}$ άρα

$f(x) = \frac{4-x^2}{x}$, $x > 0$

Β2. (i)Η f συνεχείς και παραγωγίσιμη στο (0,+ ∞) με

$f'(x) = \frac{-2x \cdot x - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2-4}{x^2} = \frac{-(x^2+4)}{x^2} < 0$ επομένως

η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x > 0$.

(ii) Ισχύει ότι $e < \pi \underset{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(e) > f(\pi) \Leftrightarrow \frac{4-e^2}{e} > \frac{4-\pi^2}{\pi} \underset{(4-e^2)<0}{\Longleftrightarrow} \frac{\pi}{e} < \frac{4-\pi^2}{4-e^2}$

Β3. $\lim_{\chi \to 0^+} f(x) = \lim_{\chi \to 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{\chi \to 0^+} (4 - x^2) \cdot \frac{1}{x} = +\infty$

Άρα η $x = 0$ (άξονας y'y) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Έστω $y = \lambda \cdot x + \beta$ η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

$\lambda = \lim_{\chi \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$ επομένως προκύπτει $\lambda = -1$.

$\beta = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4-x^2}{x} + x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4-x^2+x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$ επομένως $\beta = 0$.

Άρα, η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = -x$.

Β4. Ισχύει ότι $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\right| \leq \left|\frac{1}{f(x)}\right| \Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}$

Αφού $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$, προκύπτει ότι

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ $\kappa\alpha\iota$ $\lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{1}{f(x)}\right] = 0$, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Είναι:

$$\int_2^3 x \cdot f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 x \cdot \left(\frac{1}{x} + \alpha\right)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1 + \alpha x)dx = 1 \Leftrightarrow \left[x + \alpha\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow$$

$$3 + \frac{9\alpha}{2} - 2 - \frac{4\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9\alpha}{2} - \frac{4\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Γ2. i. Για $\alpha = 0$ η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, x < 1 \\ \frac{1}{x}, x \geq 1 \end{cases}$$

Για να ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f θα πρέπει η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.Πράγματι:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x-2)=-1(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=-\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=-1(2)$$

Από (1),(2) ισχύει: $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$,άρα υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=1$.

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ με $f(1)=1$ και $f'(1)=-1$.΄Αρα $y-1=(-1)(x-1)\Leftrightarrow y=-x+2$ και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$ θα ικανοποιεί την σχέση $\varepsilon\varphi\omega=-1$,δηλαδή $\omega=135^o$.

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική και στο $(1,+\infty)$ ως ρητή. Επίσης αφού αποδείξαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ είναι και συνεχής σε αυτό,άρα η f είναι παραγωγίσιμη (και συνεχής) στο $\Re$.Τότε:

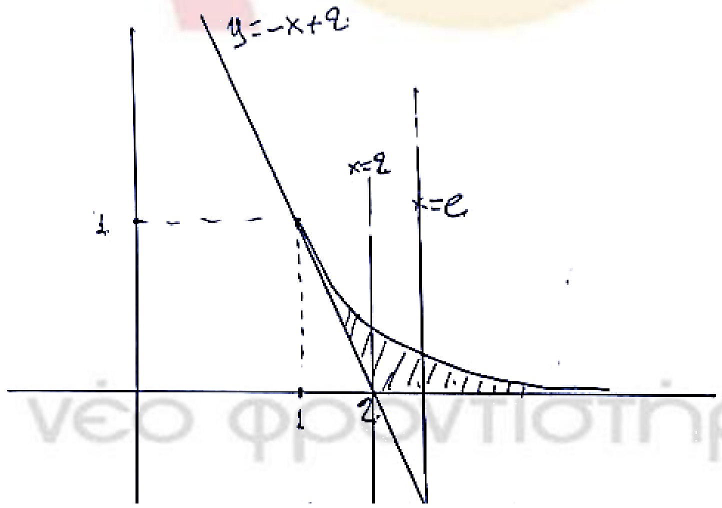
$f'(x)=2x-3<0, x\in(-\infty,1)$ άρα $f\downarrow(-\infty,1]$

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0, x\in(1,+\infty)$ άρα $f\downarrow[1,+\infty)$ οπότε η $f\downarrow\Re$ άρα και 1-1 στο $\Re$.Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Re$ το σύνολο τιμών της είναι το

$f(\Re)=(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x))=(0,+\infty)$ αφού $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-3x+3)=+\infty$

Γ4. Η γραφική παράσταση της f για $x\geq 1$ και η εφαπτόμενη ευθεία (ε) στο $x_0=1$ είναι



Το ζητούμενο εμβαδό είναι της γραμμοσκιασμένης περιοχής. Θα πρέπει να βρούμε που η ευθεία $y=-x+2$ τέμνει τον $x'x$ και αυτό γίνεται στο σημείο $x=2$.Άρα το εμβαδό είναι :

$$E=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-(-x+2)\right)dx+\int_2^e\frac{1}{x}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx+\int_2^e\frac{1}{x}dx=$$

$$\left[\ln x+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2+\left[\ln x\right]_2^e=\ln 2+2-4-\ln 1-\frac{1}{2}+2+\ln e-\ln 2=$$

$$2-4-\frac{1}{2}+2+1=\frac{1}{2}\tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1},\quad x\in(0,1)\cup(1,2)$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\ell\in\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,2)$ έχουμε

$$f(x)-2x=(x-1)g(x)\Leftrightarrow f(x)=(x-1)g(x)+2x$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)g(x)+2x\right]=(1-1)\ell+2\cdot 1=2$

Η f είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Άρα $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)\Leftrightarrow \ln(2-1)-\dfrac{1}{1}+\kappa=2\Leftrightarrow \kappa-1=2\Leftrightarrow \kappa=3$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+2-x}{(2-x)x^2}=-\frac{x^2+x-2}{x^2(2-x)}=-\frac{(x-1)(x+2)}{x^2(2-x)}=-\frac{(x+2)}{x^2(2-x)}(x-1)$$

Για κάθε $x\in(0,2)=D_f$ είναι $-\dfrac{x+2}{x^2(2-x)}<0\quad(1)$

Έχουμε

$$f'(x)=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}x-1=0\Leftrightarrow x=1$$

$$f'(x)>0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}x-1<0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}0<x<1$$

$$f'(x)<0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}x-1>0\overset{x<2}{\Leftrightarrow}1<x<2$$

x	0		1		2
$f'(x)$		+	0	−	
f		↗		↘	

Έχουμε:

Η f γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$

Η f γνησίως φθίνουσα στο $[1,2)$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 το $f(1)=2$

Έστω $\Delta_1=(0,1]$ και $\Delta_2=(1,2)$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+3\right]=\ln 2-(+\infty)+3=-\infty$

$f(1)=2$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)\overset{\text{f συνεχης}}{=} f(1)=2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left[\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+3\right]=(-\infty)-\dfrac{1}{2}+3=-\infty$

Έχουμε:

Η f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Δ_1 άρα $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right]=(-\infty,2]$

Η f γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο Δ_2 άρα $f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to 2^-} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right)=(-\infty,2)$

$0\in f(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα $x_1\in\Delta_1$ και μάλιστα μοναδική στο Δ_1 διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1.

$0\in f(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα $x_2\in\Delta_2$ και μάλιστα μοναδική στο Δ_2 διότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2.

Θα αποδείξουμε ότι $x_1<\dfrac{1}{3}$

Είναι $f(\dfrac{1}{3})=\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)>\ln 1=0$.

Επιπλέον $f(x_1)=0$

$$x_1, \frac{1}{3} \in \Delta_1 \text{ και } f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \overset{\text{f γνησίως αύξουσα στο } \Delta_1}{\Leftrightarrow} x_1 < \frac{1}{3}$$

Δ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε

$$f'(\xi) = \frac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{3f(\frac{1}{3})}{3(\frac{1}{3}-x_1)} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}-x_1} \overset{f(x_1)=0}{\Leftrightarrow} f'(\xi) = \frac{f(\frac{1}{3})-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}$$

Η f ικανοποιεί το Θ.Μ.Τ. στο $[x_1, \frac{1}{3}]$ διότι είναι συνεχής σε αυτό και παραγωγίσιμη στο $(x_1, \frac{1}{3})$. Άρα

υπάρχει $\xi \in (x_1, \frac{1}{3}) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\frac{1}{3})-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}$ (1)

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$(f'(x))' = f''(x) = (-\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x^2})' = (\frac{1}{x-2} + x^{-2})' = \frac{-(x-2)'}{(x-2)^2} - 2x^{-3} = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3}$$

Είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,2)$ άρα $f' \downarrow (0,2)$ και επειδή $(0,1) \subseteq (0,2)$ οπότε $f' \downarrow (0,1)$ άρα και 1-1.
Επομένως ο ξ που ικανοποιεί την (1) είναι μοναδικός.

Δ4. i. Οι F και G είναι παράγουσες της f στο (0,2)

Άρα υπάρχει $C \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in (0,2)$ να ισχύει $F(x) = G(x) + C \quad (3)$

Για $x = x_1$ η (3) γίνεται $F(x_1) = G(x_1) + C \quad (4)$

Για $x = x_2$ η (3) γίνεται $F(x_2) = G(x_2) + C \quad (4)$

Από την (4) αφαιρούμε κατά μέλη την (5) και έχουμε:

$$F(x_1) - F(x_2) = G(x_1) + \cancel{C} - G(x_2) - \cancel{C} \overset{F(x_1)=G(x_2)=0}{\Leftrightarrow}$$

$$-F(x_2) = G(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$$

ii. Θα αποδείξουμε ότι έχει ακριβώς μία λύση στο (x_1, x_2) η εξίσωση

$$x_1F(x) + x_2G(x) = x_1 + x_2 - 2x \Leftrightarrow x_1F(x) + x_2G(x) + 2x - x_1 - x_2 = 0 \quad (6)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$H(x)=x_1F(x)+x_2G(x)+2x-x_1-x_2,\quad x\in[x_1,x_2]$

Η εξίσωση (6) γράφεται $H(x)=0 \quad (7)$

Οι συναρτήσεις F και G παραγωγίσιμες στο $[x_1,x_2]$

Είναι και συνεχείς στο $[x_1,x_2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $H(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)+2x_1-x_1-x_2\overset{F(x_1)=0}{=}x_2G(x_1)+x_1-x_2$

$H(x_2)=x_1F(x_2)+x_2G(x_2)+2x_2-x_1-x_2\overset{G(x_2)=0}{=}x_1F(x_2)+x_2-x_1\overset{F(x_2)=-G(x_1)}{=}-x_1G(x_1)+x_2-x_1$

Θα αποδείξουμε ότι $G(x_1)<0$

Η G είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $G'(x)=f(x)$

Έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1,1]$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,x_2]$

Για κάθε $x\in(x_1,1]$ είναι $x>x_1 \overset{\text{f είναι γνησίως αύξουσα στο } [x_1,1]}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_1)\Leftrightarrow f(x)>0$

Για κάθε $x\in[1,x_2)$ είναι $x<x_2 \overset{\text{f είναι γνησίως φθίνουσα στο } [1,x_2]}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_2)\Leftrightarrow f(x)>0$

Άρα για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ είναι $f(x)>0\Leftrightarrow G'(x)>0$

Άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1,x_2]$ οπότε $G(x_1)<G(x_2)\Leftrightarrow G(x_1)<0$

Είναι $\begin{cases} x_2G(x_1)<0 \\ x_1-x_2<0 \end{cases}\Rightarrow x_2G(x_1)+x_1-x_2<0\Rightarrow H(x_1)<0$

Είναι $\begin{cases} -x_1G(x_1)>0 \\ x_2-x_1>0 \end{cases}\Rightarrow -x_1G(x_1)+x_2-x_1>0\Rightarrow H(x_2)>0$

Άρα $H(x_1)H(x_2)<0$

Βάση του Θεωρήματος Bolzano η εξίσωση (7) έχει ρίζα στο (x_1,x_2) και μάλιστα μοναδική διότι η H είναι γνησίως αύξουσα στο (x_1,x_2).

Αφού η H είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $H'(x)=x_1F'(x)+x_2G'(x)+2=x_1f(x)+x_2f(x)+2>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$.

(υπενθυμίζεται ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ και $x_1>0,\ x_2>0$)

Επιμέλεια απαντήσεων: Αγοργιανίτης Ιωάννης, Βερέμης Δημήτριος, Δελενίκα Μαρία, Ιωσηφίδης Σταύρος, Κανελλόπουλος Γιώργος, Τσίμος Βασίλειος.